**1.Множества. Операции над множествами. Основные свойства операций.**

***Множества*** *— это основополагающая концепция в математике, представляющая собой коллекции различных объектов, называемых элементами. Операции над множествами позволяют манипулировать этими коллекциями и изучать их свойства*.  
  
**Основные операции над множествами:**  
**1. Объединение (∪):**  
   Объединение двух множеств A и B — это множество, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.  
**A ∪ B = { x | x ∈ A или x ∈ B }**

**2. Пересечение (∩):**  
   Пересечение двух множеств A и B — это множество, содержащее только те элементы, которые принадлежат обоим множествам.  
**A ∩ B = { x | x ∈ A и x ∈ B }**

**3. Разность (−):**   Разность множества A и множества B — это множество, содержащее элементы, которые принадлежат A , но не принадлежат B .

**A - B = { x | x ∈ A и x ∉ B }**

**4. Дополнение:**  
   Дополнение множества A относительно универсального множества U — это множество, содержащее все элементы универсального множества, которые не принадлежат A .  
**A' = U - A**

**Основные свойства операций над множествами:**  
**1. Коммутативность:**  
**• A ∪ B = B ∪ A • A ∩ B = B ∩ A**   
  
**2. Ассоциативность:**  
**• (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C) • (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)**  
**3. Дистрибутивность:**  
   **• A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) • A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)**

**4. Идемпотентность:**

**• A ∪ A = A • A ∩ A = A**   
  
**5. Нейтральные элементы:**  
**• Для объединения: A ∪ ∅ = A • Для пересечения: A ∩ U = A**   
  
**6. Закон де Моргана:  
   • (A ∪ B)' = A' ∩ B' • (A ∩ B)' = A' ∪ B'**   
  
**7. Противоположные элементы:**  
 **• A - B = A ∩ B'**

**2.Числовые множества. Действительные числа. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел**

**Числовые множества** представляют собой группы чисел, которые имеют определенные свойства и используются в математике для различных целей. Основные числовые множества включают:  
  
**1. Натуральные числа:**  
   • Множество положительных целых чисел: {1, 2, 3, …}   
  
**2. Целые числа:**  
   • Множество всех целых чисел, включая положительные, отрицательные и ноль: { …, -3, -1, 0, 1, 2, … } .  
**3. Рациональные числа:**  
   • Множество всех дробных чисел, которые могут быть выражены в виде p/q , где p и q — целые числа, а q ≠ 0 .  
  
**4. Иррациональные числа:**  
• Числа, которые не могут быть выражены в виде дроби p/q . Примеры: √(2), π, e .  
  
**5. Действительные числа:**  
   • Объединение рациональных и иррациональных чисел. Действительные числа включают все точки на числовой прямой.  
  
Действительные числа представляют собой расширение рациональных чисел и включают в себя как конечные десятичные дроби, так и бесконечные (периодические и непериодические) дроби. Они могут быть представлены на числовой прямой и обладают рядом свойств:  
  
**• Порядок:** Для любых двух действительных чисел можно установить порядок (больше, меньше или равно).  
**• Замкнутость:** Действительные числа замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль).  
**• Полнота**: Каждое ограниченное множество действительных чисел имеет supremum (наименьшую верхнюю грань) и infimum (наибольшую нижнюю грань).  
  
**Аксиоматическое определение множества вещественных чисел**  
Существует несколько аксиоматических подходов к определению действительных чисел. Один из наиболее известных — это аксиоматический подход Кантара и Дедекинда. Он основывается на следующих аксиомах:  
  
**1. Аксиомы порядка:**  
   • Действительные числа образуют упорядоченное поле.  
   • Для любых двух различных действительных чисел a и b выполняется либо a < b , либо a > b .  
  
**2. Аксиомы полей:**  
   • Действительные числа образуют поле, что означает наличие операций сложения и умножения с определенными свойствами (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность и наличие обратных элементов).  
  
**3. Аксиома полноты:**  
   • Каждое непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет наименьшую верхнюю грань (supremum).

**4. Аксиома существования:**  
   • Существуют элементы 0 и 1 в действительных числах такие, что для любого действительного числа x , выполняются равенства x + 0 = x и x ⋅ 1 = x .  
  
**5. Аксиомы непрерывности:**  
   • Для любого действительного числа x существует последовательность рациональных чисел, которая сходится к x .

**3.Ограниченные множества действительных чисел. Точная верхняя и точная нижняя грани числовых множеств**

**Ограниченное множество действительных чисел** — это множество, которое имеет верхнюю и нижнюю грани. Формально, множество A ⊆∞ называется ограниченным сверху, если существует число M ∈ ∞ такое, что для всех x ∈ A выполняется x ≤ M . Если такое число существует, то M называется верхней границей (или верхней гранью) множества A .  
  
Аналогично, множество A называется ограниченным снизу, если существует число m ∈ ∞такое, что для всех x ∈ A выполняется x ≥ m . Если такое число существует, то m называется нижней границей (или нижней гранью) множества A .  
  
**1. Точная верхняя грань (supremum):**  
   • Точная верхняя грань множества A (обозначается как sup A ) — это наименьшее из всех верхних пределов множества. То есть, если M = sup A , то:  
     • Для любого x ∈ A выполняется x ≤ M .  
     • Для любого числа m < M существует элемент a ∈ A такой, что m < a .  
  
**2. Точная нижняя грань (infimum):**  
   • Точная нижняя грань множества A (обозначается как \inf A ) — это наибольшее из всех нижних пределов множества. То есть, если m = \inf A , то:  
     • Для любого x ∈ A выполняется m ≤ x .  
     • Для любого числа M > m существует элемент a ∈ A такой, что a < M .  
  
**Свойства верхней и нижней границ**  
• Если множество ограничено сверху, то supremum всегда существует в множестве действительных чисел.  
• Если множество ограничено снизу, то infimum также всегда существует в множестве действительных чисел.  
• Если supremum принадлежит множеству A , то оно называется максимальным элементом этого множества.  
• Если infimum принадлежит множеству A , то оно называется минимальным элементом этого множества.

**4.Принцип Архимеда и его следствия. Принцип Кантора. Принцип предельной точки.**

**Принцип Архимеда**  
Формулировка: Принцип Архимеда утверждает, что для любых двух положительных действительных чисел a и b существует натуральное число n, такое что:

n ⋅ a > b

Это означает, что если мы берем любое положительное число a, мы можем найти достаточно большое количество n, чтобы его произведение с a превысило любое другое положительное число b.

**Следствия принципа Архимеда**  
**1. Неограниченность натуральных чисел:** Для любого действительного числа x существует натуральное число n , такое что n > x . Это следствие говорит о том, что натуральные числа не имеют верхней границы.

*Формальное доказательство неограниченности:*

• Рассмотрим любое натуральное число n.

• Мы можем всегда найти большее натуральное число, добавив к n единицу: n + 1.

• Поскольку n + 1 также является натуральным числом, это показывает, что для любого заданного натурального числа всегда можно найти большее.

• Таким образом, мы можем продолжать этот процесс бесконечно.

**2. Плотность рациональных чисел:** Между любыми двумя различными действительными числами всегда можно найти рациональное число. Это следует из того, что для любых двух чисел a < b можно найти r = (a + b)/2 , которое будет рациональным.

*Например, между любыми двумя рациональными числами также можно найти другие рациональные числа. Если взять два рациональных числа ⅓ и ½, то можно найти множество других рациональных чисел между ними, например, 5/12*.

**3. Существование предела:** Принцип Архимеда также лежит в основе существования предела для последовательностей и функций, поскольку он гарантирует, что при увеличении аргумента функция будет принимать значения, стремящиеся к определенному пределу.  
  
**Принцип Кантора**  
Принцип Кантора, разработанный немецким математиком Георгом Кантором в конце XIX века, представляет собой фундаментальное утверждение в теории множеств, касающееся различных уровней бесконечности и их соотношений. В основе этого принципа лежит понятие мощности множества, которое служит мерой "размера" множества и позволяет сравнивать множества по количеству их элементов. Множество называется счетным, если его элементы можно сопоставить с натуральными числами, что означает, что оно может быть перечислено. Примеры счетных множеств включают множество натуральных чисел 𝕅 , множество целых чисел 𝕑 и множество рациональных чисел 𝕈 . Все эти множества имеют одну и ту же мощность, обозначаемую как ℵ₀ (алеф нуль), что указывает на то, что они бесконечны, но при этом счетны.

Однако Кантор также показал, что существуют и несчетные множества, которые обладают большей мощностью, чем счетные. Наиболее известным примером несчетного множества является множество вещественных чисел 𝕉 . Для доказательства того, что мощность вещественных чисел больше, чем мощность счетных множеств, Кантор использовал свой знаменитый диагональный аргумент. Он предположил, что все вещественные числа можно перечислить в некотором списке и затем продемонстрировал, что всегда можно сконструировать вещественное число, которое не входит в этот список, изменив цифры на диагонали. Таким образом, он пришел к выводу, что множество вещественных чисел не может быть сопоставлено с множеством натуральных чисел, что доказывает его несчетность.

Кантор также ввел понятие различных уровней бесконечности. Он доказал, что существует бесконечно много мощностей бесконечных множеств. Например, мощность счетного множества равна ℵ₀ , тогда как мощность множества вещественных чисел равна 2^(ℵ₀) , что больше ℵ₀ . Это открытие привело к пониманию того, что не все бесконечности равны и что существует иерархия бесконечных множеств.

Одним из наиболее обсуждаемых аспектов принципа Кантора является континуум-гипотеза. Эта гипотеза утверждает, что нет множеств мощности между мощностью счетного множества и мощностью континуума (вещественных чисел). То есть, если κ — это мощность некоторого множества, то либо κ = ℵ₀ , либо существует такое λ , что κ = 2^(ℵ₀) . Континуум-гипотеза была предметом активных исследований и была доказана как независимая от стандартных аксиом теории множеств (ZFC), что означает, что она не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках традиционных аксиоматических систем..  
  
**Следствия принципа Кантора**  
**1. Неисчислимость некоторых множеств**: Принцип Кантора показывает, что существуют множества, которые не могут быть перечислены (например, множество всех действительных чисел), в отличие от множества натуральных чисел.

**Диагональный аргумент(доказательство):**

1. Предположим, что множество всех вещественных чисел можно перечислить: r₁, r₂, r₃, … .

2. Каждое вещественное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

3. Мы можем построить новое вещественное число r , изменяя каждую n -ю цифру дроби rₙ . Например, если rₙ имеет n -ю цифру 5, мы можем взять 6 (или любую другую цифру, отличную от

4. Это новое число r не будет совпадать ни с одним из перечисленных чисел rₙ , так как оно отличается от каждого из них хотя бы одной цифрой.

5. Таким образом, мы пришли к противоречию: наше предположение о том, что все вещественные числа можно перечислить, неверно. Следовательно, множество вещественных чисел несчетно.

**2. Кардинальные числа:** Кардинальные числа — это числа, которые используются для обозначения мощности множеств. Они позволяют сравнивать размеры различных множеств, включая бесконечные.

**Счетные кардинальные числа**

Счетное множество: Множество называется счетным (или счетно бесконечным), если его мощность равна мощности множества натуральных чисел . Это обозначается как ℵ₀ (алеф нуль).

**Примеры счетных множеств:**

• Множество натуральных чисел

• Множество целых чисел

• Множество рациональных чисел

Несмотря на то что множество целых и рациональных чисел "больше" множества натуральных чисел в интуитивном смысле (например, между любыми двумя целыми числами можно найти бесконечно много рациональных), все эти множества имеют одну и ту же мощность ℵ₀ .

**Несчетные кардинальные числа**

• Несчетные множества: Как уже упоминалось, множество вещественных чисел имеет мощность, которую обозначают как 2^(ℵ₀) . Это число больше чем ℵ₀ .

• Обозначение: Мощность множеств может быть обозначена с помощью кардинальных чисел. Например:

• Мощность конечного множества с n элементами обозначается как n .

• Мощность счетного множества обозначается как ℵ₀ .

• Мощность вещественных чисел обозначается как c (континуум), и по теореме Кантора c = 2^(ℵ₀) .

**Иерархия кардинальных чисел**

Кантор показал, что между различными кардинальными числами существует иерархия. Например:

• Существует множество кардинальных чисел между ℵ₀ и 2^(ℵ₀) , но континуум-гипотеза утверждает, что нет кардинального числа между ними. Эта гипотеза остается открытым вопросом в теории множеств.

**Принцип предельной точки**  
*Принцип предельной точки* (или принцип предельной точки для последовательностей) утверждает, что если последовательность (xₙ) сходится к пределу L , то для любой окрестности U точки L существует такой номер N , что для всех n > N выполняется xₙ ∈ U

Т.е. в контексте пределов, принцип предельной точки позволяет исследовать, как функция ведет себя, когда её аргумент стремится к определенному значению. Например, если мы рассматриваем функцию f(x), мы можем анализировать предел lim (x → a) f(x). Если f(x) непрерывна в точке a, то предел будет равен значению функции в этой точке, то есть lim (x → a) f(x) = f(a). Однако если функция имеет разрыв или ведет себя особым образом в точке a, предел может не существовать или быть равным бесконечности.

Принцип предельной точки также имеет важное значение при исследовании сходимости последовательностей. Рассмотрим последовательность {an}. Если существует предел lim (n → ∞) an = L, это означает, что члены последовательности приближаются к значению L по мере увеличения n. Однако в зависимости от свойств последовательности, поведение членов может значительно варьироваться. Например, если последовательность является монотонной и ограниченной, то по теореме о пределе монотонной последовательности она обязательно сходится к своему пределу. С другой стороны, если последовательность не ограничена или не монотонна, она может не иметь предела.

Еще одной важной концепцией, связанной с принципом предельной точки, является понятие непрерывности функций. Функция f(x) называется непрерывной в точке a, если выполняется условие: lim (x → a) f(x) = f(a). Это означает, что значение функции в точке a совпадает с пределом значений функции при приближении к этой точке. Если функция имеет разрывы или асимптоты вблизи точки a, это может привести к тому, что предел не совпадает со значением функции в данной точке, что является признаком разрыва.

Принцип предельной точки также находит применение в анализе производных. Производная функции в точке a определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента: f'(a) = lim (h → 0) [f(a + h) - f(a)] / h. Здесь важно понимать, что поведение функции вблизи точки a определяет значение производной. Если функция имеет резкие изменения или разрывы в этой области, это может привести к тому, что производная не будет существовать.  
  
**Следствия принципа предельной точки**  
**1. Сходимость последовательностей:** Последовательность (aₙ) называется сходящейся, если существует предел L, такой что:

**lim(n → ∞) aₙ = L.**

Это означает, что для любого заданного ∊ > 0 существует натуральное число N, такое что для всех n > N выполняется неравенство:

**|aₙ - L| < ∊.**

Если последовательность не имеет предела, она называется расходящейся. Важно отметить, что если последовательность сходится, то она является ограниченной, что является одним из ключевых свойств сходимости.

**2. Формулировка предела:** Формулировка предела в контексте функции и последовательностей может быть выражена через ε-δ (эпсилон-дельта) определение. Для функции f(x) предел при x стремящемся к a равен L, если для любого ∊ > 0 существует δ > 0, такое что:

**0 < |x - a| < δ ⇒ |f(x) - L| < ∊.**

Это определение позволяет формально установить связь между значениями функции и её поведением в окрестности точки. Если такая связь существует, функция считается непрерывной в точке a.

**3. Топологические свойства:** Принцип предельной точки также является основой для более глубоких топологических свойств, таких как компактность и полнота. • Предельная точка: Точка x₀ называется предельной точкой множества A, если в любой окрестности точки x₀ содержится хотя бы одна точка из A, отличная от x₀.

• Замыкание: Замыкание множества A, обозначаемое ‾A, включает все точки множества A и все его предельные точки. Это множество является замкнутым.

• Открытые и замкнутые множества: В рамках топологии открытые множества являются основой для определения непрерывности функций. Функция называется непрерывной, если обратное изображение открытого множества остается открытым.

**Связь между сходимостью и топологией**

Сходимость последовательностей также имеет топологическую интерпретацию. Последовательность (aₙ) сходится к пределу L в метрике (или топологии), если для любой открытой окрестности U точки L существует номер N, такой что для всех n > N члены последовательности находятся в этой окрестности:

**aₙ ∈ U.**

Таким образом, сходимость последовательностей можно рассматривать как свойство, связанное с открытыми множествами в топологии.

**5.Последовательность. Понятие предела последовательности. Критерий Коши. Свойства сходящихся последовательностей**

**Последовательность** — это упорядоченный набор элементов, который может быть конечным или бесконечным. Последовательность обозначается как (aₙ) , где n — натуральное число, а aₙ — элементы последовательности. Например, последовательность натуральных чисел можно записать как (1, 2, 3, 4, …) .

**Понятие предела последовательности**  
Предел последовательности — это значение, к которому элементы последовательности стремятся по мере увеличения индекса n . Формально, последовательность (aₙ) имеет предел L , если для любого положительного числа ε существует такой номер N , что для всех n > N выполняется неравенство:

|aₙ - L| < ε  
Это означает, что элементы последовательности становятся произвольно близкими к значению L при достаточном увеличении n .  
  
**Критерий Коши**  
Критерий Коши для последовательностей утверждает, что последовательность (aₙ) сходится (имеет предел), если и только если для любого положительного числа ε существует такой номер N , что для всех m, n > N выполняется:  
|aₙ - aₘ| < ε

Это означает, что члены последовательности становятся произвольно близкими друг к другу по мере увеличения индексов. Критерий Коши является полезным инструментом для проверки сходимости последовательностей, особенно когда невозможно явно найти предел.

Другими словами, последовательность (aₙ) называется последовательностью Коши, если для любого положительного числа ∊ > 0 существует натуральное число N, такое что для всех m, n > N выполняется неравенство |aₙ - aₘ| < ∊. Это условие означает, что члены последовательности становятся сколь угодно близкими друг к другу, если мы рассматриваем достаточно большие индексы.   
Критерий Коши позволяет нам определить сходимость последовательностей даже в тех случаях, когда не удается явно найти предел. Если последовательность является последовательностью Коши, то она обязательно сходится в любом полном пространстве, что делает этот критерий особенно полезным в анализе. Например, в пространстве действительных чисел, которое является полным, каждая последовательность Коши будет сходиться к какому-то пределу. Однако в неполных пространствах, таких как пространство рациональных чисел, могут существовать последовательности Коши, которые не имеют предела в этом пространстве.  
Критерий Коши также применяется к рядам. Ряд ∑ₙ₌₁^∞ aₙ сходится, если и только если последовательность частичных сумм SN = a₁ + a₂ + ... + aN является последовательностью Коши. Это означает, что для любого ∊ > 0 существует такое N, что для всех m, n > N выполняется |Sₙ - Sₘ|

< ∊. Таким образом, использование критерия Коши позволяет проверить сходимость ряда без необходимости вычисления его предела

**Основные идеи критерия Коши:**  
1. **Близость членов последовательности**: Критерий Коши утверждает, что если последовательность является сходящейся, то по мере увеличения индекса члены последовательности становятся произвольно близкими друг к другу. Это означает, что для любого заданного уровня точности (эпсилон) можно найти такой номер члена последовательности (N), начиная с которого все последующие члены будут находиться в пределах этого уровня точности.  
2. **Отсутствие необходимости в пределе**: Критерий Коши позволяет проверить сходимость последовательности без необходимости знать или вычислять предел. Это особенно полезно в случаях, когда предел трудно найти.  
3. **Применимость к полным пространствам**: В полном пространстве (например, в пространстве действительных чисел) каждая последовательность Коши обязательно сходится. Это делает критерий Коши мощным инструментом для работы с такими пространствами

**Свойства сходящихся последовательностей**  
Существуют несколько ключевых свойств сходящихся последовательностей:  
**1. Единственность предела**: Если последовательность сходится, то её предел единственный. То есть, если aₙ → L и aₙ → M , то L = M

. **Суть свойства:**  
Если последовательность (aₙ) сходится к пределу L, то она не может сходиться к другому пределу M, если L ≠ M. Это означает, что предел последовательности, если он существует, является единственным.  
**Доказательство:**  
Предположим, что (aₙ) сходится к двум различным пределам L и M. По определению сходимости для любого ∊ > 0\ существуют такие номера N₁ и N₂, что для всех n > N₁ выполняется |aₙ - L| < ∊/2, а для всех n > N₂ выполняется |aₙ - M| < ∊/2. Пусть N = max(N₁, N₂). Тогда для всех n > N:

**|aₙ - L| < ∊ / 2 и |aₙ - M| < ∊ / 2.**

По неравенству треугольника:

**|L - M| = |L - aₙ + aₙ - M| ≤ |L - aₙ| + |aₙ - M| < ∊ / 2 + ∊ / 2 = ∊.**

Так как это верно для любого ∊ > 0, мы приходим к противоречию, если L ≠ M. Таким образом, предел единственный.

**2. Сохранение ограниченности:** Если последовательность сходится к пределу L , то она ограничена. Это означает, что существует такое число M > 0 , что для всех n выполняется |aₙ| < M .

**Суть свойства:**  
Если последовательность (aₙ) сходится к пределу L, то она обязательно ограничена. Это значит, что существует такое число M, что для всех n выполняется |aₙ| < M.  
  
**Доказательство:**  
Пусть (aₙ) сходится к L. По определению сходимости для любого ∊ > 0\ существует номер N, такой что для всех n > N выполняется |aₙ - L| < 1. Это значит, что для всех таких n:

**L - 1 < aₙ < L + 1.**

Таким образом, члены последовательности, начиная с некоторого номера, находятся в интервале (L - 1, L + 1). Теперь нужно учесть конечное количество членов до номера N. Пусть M₁ = max(|a₁|, |a₂|, …, |a\_N|) и M₂ = |L| + 1. Тогда можно взять M = max(M₁, M₂). Таким образом, для всех n выполняется |aₙ| < M, что доказывает ограниченность.

**3. Свойство арифметики пределов:**   • Если aₙ → L и bₙ → M , то:  
     • Сумма: aₙ + bₙ → L + M   
     • Разность: aₙ - bₙ → L - M   
     • Произведение: aₙ bₙ → LM   
     • Частное: если M ≠ 0 , то aₙ/bₙ → L/M

Суть свойства:  
Если две последовательности (aₙ) и (bₙ) сходятся соответственно к пределам L и M, то:  
• Сумма: (aₙ + bₙ) сходится к L + M.  
• Разность: (aₙ - bₙ) сходится к L - M.  
• Произведение: (aₙ bₙ) сходится к LM.  
• Частное: ((aₙ/bₙ)) сходится к L/M, при условии что M ≠ 0.  
  
Доказательство:  
Пусть (aₙ) сходится к L и (bₙ) сходится к M. Для любого ∊ > 0\ существуют номера N₁ и N₂, такие что:  
• Для всех n > N₁: |aₙ - L| < (∊)/2,  
• Для всех n > N₂: |bₙ - M| < (∊)/2.  
Пусть N = max(N₁, N₂). Тогда для всех n > N:

1. **Сумма**:

|(aₙ + bₙ) - (L + M)| = |(aₙ - L) + (bₙ - M)| ≤ |aₙ - L| + |bₙ - M| < ∊ / 2 + ∊ / 2 = ∊.

2. **Разность**:

|(aₙ - bₙ) - (L - M)| = |(aₙ - L) - (bₙ - M)| ≤ |aₙ - L| + |bₙ - M| < ∊ / 2 + ∊ / 2 = ∊.

3. **Произведение**:  
   Для произведения используется неравенство:

**|aₙ bₙ - LM| = |(aₙ - L)bₙ + L(bₙ - M)|.**

Сначала оценим каждую часть:  
   • Для первого слагаемого:

**|(aₙ - L)bₙ| < |aₙ - L| |bₙ| < ∊ / 2 (|M| + 1)**

(где мы использовали ограниченность последовательности).  
   • Для второго:

**|L(bₙ - M)| < |L| |bₙ - M| < |L| ⋅ ∊ / 2.**  
Таким образом, комбинируя эти оценки, получаем:

**|aₙ bₙ - LM| < C∊,**

где C — константа, зависящая от пределов.  
  
4. **Частное**:  
   Если M ≠ 0, можно записать:

**|aₙ / bₙ - L / M| = |aₙ M - bₙ L / bₙ| = |(aₙ - L)M + L(bₙ - M) / bₙ|.**

Здесь также можно использовать ограниченность и оценить каждую часть.

**4. Монотонные последовательности**: Если последовательность монотонна (возрастающая или убывающая) и ограничена, то она сходится.

**Суть свойства:**  
Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху (или монотонно убывает и ограничена снизу), то она сходится.  
**Доказательство:**

Пусть последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. Обозначим её верхнюю границу как L = sup(aₙ). Так как последовательность ограничена, существует хотя бы один член, который меньше или равен этой верхней границе. Поскольку последовательность монотонно возрастает, для любого числа x < L найдется такой номер Nₓ, что для всех n > Nₓ выполняется aₙ > x. Это означает, что последовательность будет приближаться к верхней границе и не может её превысить.

**5. Перемещение предела:**

**Суть свойства:**  
Если последовательность сходится к пределу L, то любая её подпоследовательность также будет сходиться к тому же пределу.  
  
**Доказательство:**  
Пусть подпоследовательность обозначается как (a\_(nₖ)), где nₖ — возрастающая последовательность индексов. Если основная последовательность сходится к L, то для любого положительного числа ∊ > 0\ существует номер N, такой что для всех n > N:

**|aₙ - L| < ∊.**

Поскольку индексы подпоследовательности также возрастают, если выбрать достаточно большой номер k, то будет выполнено условие для соответствующего индекса из основной последовательности:  
Для всех k, таких что nₖ > N,

**|a\_(nₖ) - L| < ∊.**

Таким образом, подпоследовательность также сходится к пределу  
**6. Свойство подпоследовательностей:** Если последовательность сходится к пределу L , то любая её подпоследовательность также будет сходиться к тому же пределу.

**6.Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности**

**Бесконечно большая последовательность** — это последовательность (aₙ) , элементы которой стремятся к бесконечности по мере увеличения индекса n . Формально, последовательность (aₙ) считается бесконечно большой, если:

lim(n → ∞) aₙ = ∞  
Это означает, что для любого положительного числа M существует такой номер N , что для всех n > N выполняется aₙ > M . Примеры бесконечно больших последовательностей включают:  
• Последовательность натуральных чисел: (1, 2, 3, 4, …)   
• Последовательность квадратов натуральных чисел: (1, 4, 9, 16, …)   
  
**Бесконечно малая последовательность** — это последовательность (bₙ) , элементы которой стремятся к нулю по мере увеличения индекса n . Формально, последовательность (bₙ) считается бесконечно малой, если:

lim(n → ∞) bₙ = 0  
Это означает, что для любого положительного числа ε существует такой номер N , что для всех n > N выполняется |bₙ| < ε . Примеры бесконечно малых последовательностей включают:  
• Последовательность (( 1/n )) : (( 1, ½, ⅓, … ))   
• Последовательность (( 1/n² )) : (( 1, ¼, 1/9, … ))   
  
**Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности являются противоположными понятиями**. Если последовательность (aₙ) является бесконечно большой, то любая бесконечно малая последовательность (bₙ) может быть использована для того, чтобы показать, как быстро растет aₙ :

aₙ = o(bₙ) (если aₙ растёт быстрее, чем bₙ)  
Например, если aₙ = n² и bₙ = n , то можно сказать, что: n² = o(n²)

**Применение**  
 Эти понятия часто используются в анализе для описания поведения функций и их пределов. Например, в производных и интегралах важно понимать, как функции ведут себя при стремлении к определённым значениям.   
 Также в теории асимптотического анализа, бесконечно малые и бесконечно большие функции могут быть использованы для упрощения выражений и нахождения пределов.

**7.Предельные точки числовых последовательностей. Верхний предел. Нижний предел. Примеры. Теорема Больцано-Вейерштрасса.**

Предельной точкой последовательности (aₙ) называется такое число x , что для любого ε > 0 существует бесконечно много индексов n , таких что |aₙ - x| < ε . Это означает, что элементы последовательности могут приближаться к x как угодно близко, но x не обязательно должен быть элементом самой последовательности.

**Верхний и нижний пределы**  
  
• **Верхний предел** (обозначается как **‾lim aₙ** ) — это наибольшая предельная точка последовательности. Формально:

‾lim aₙ = lim(n → ∞) \sup\_(k ≥ n) aₖ  
Это означает, что мы берем верхнюю границу всех элементов последовательности, начиная с индекса n , и затем берем предел этой величины при n → ∞ .  
• **Нижний предел** (обозначается как **\_lim aₙ** ) — это наименьшая предельная точка последовательности. Формально:

\_lim aₙ = lim(n → ∞) inf\_(k ≥ n) aₖ  
Это означает, что мы берем нижнюю границу всех элементов последовательности, начиная с индекса n , и затем берем предел этой величины при n → ∞ .  
  
**Теорема Больцано-Вейерштрасса** утверждает, что любая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность. Формально:  
Если последовательность (aₙ) ограничена, то существует такая подпоследовательность (a\_(nₖ)) , что

*lim(k → ∞) a\_(nₖ) = L,*  
где L — предельное значение.

Т.е. она утверждает, что всякая ограниченная последовательность действительных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность. Это свойство имеет важные последствия в анализе и топологии, так как оно связывает понятия ограниченности и сходимости.

Сначала стоит отметить, что ограниченность последовательности означает, что существует такое число M, что все члены последовательности находятся в интервале [-M, M]. Это свойство гарантирует, что последовательность не "убегает" к бесконечности и остается в некотором ограниченном диапазоне значений. Теорема Больцано-Вейерштрасса подразумевает, что даже если сама последовательность не сходится, мы можем найти в ней подпоследовательность, которая будет сходиться к некоторому пределу.

Формально теорема может быть сформулирована следующим образом: пусть (aₙ) — ограниченная последовательность действительных чисел. Тогда существует такая подпоследовательность (a\_(nₖ)), которая сходится к некоторому пределу L. Это означает, что можно выделить из данной последовательности некоторые члены, которые будут приближаться к L по мере увеличения индекса k.

Доказательство теоремы обычно основывается на использовании принципа Bolzano-Weierstrass, который говорит о том, что каждая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну точку накопления. Точка накопления — это такая точка L, что для любого ∊ > 0\ существует бесконечно много членов последовательности, находящихся в интервале (L - ∊, L + ∊). Это свойство позволяет выделить подпоследовательность, которая будет сходиться к этой точке.

Для доказательства теоремы можно использовать метод "разделения интервала". Сначала мы выбираем какой-то промежуток, например, [-M, M], и делим его на два равных подинтервала. Поскольку последовательность ограничена, в одном из этих подинтервалов обязательно окажется бесконечное число членов последовательности. Выбираем этот подинтервал и повторяем процесс деления. В результате мы получаем последовательность подинтервалов, длина которых стремится к нулю, и в каждом из них находится бесконечное количество членов исходной последовательности. В конце концов, по теореме о точках накопления мы можем заключить, что существует точка L, к которой будет сходиться соответствующая подпоследовательность.

Теорема Больцано-Вейерштрасса имеет множество приложений в различных областях анализа. Например, она используется для доказательства компактности множества замкнутых и ограниченных подмножеств в пространстве 𝕉ⁿ. Кроме того, это свойство часто применяется в оптимизации и теории функций, где важно знать о существовании пределов и сходимости функций.

Важно также отметить, что теорема Больцано-Вейерштрасса не утверждает о сходимости всей последовательности; она лишь гарантирует наличие сходящейся подпоследовательности. Это делает её особенно полезной в анализе сложных функций и последовательностей, где основная последовательность может не иметь предела, но её части могут демонстрировать более упорядоченное поведение.

**8.Определение числа e**

**Число e** — это математическая константа, которая примерно равна 2.71828... Оно является основой натурального логарифма и имеет множество важных свойств и приложений в математике, особенно в анализе и теории вероятностей.   
  
Существует несколько эквивалентных определений числа e :  
**1. Через предел:**  
*e = lim(n → ∞) (( 1 + 1 / n ))ⁿ*  
Это определение показывает, как e может быть получено как предел выражения, которое приближается к e по мере увеличения n .  
  
**2. Через ряд Тейлора:**  
   Число e также можно определить как сумму бесконечного ряда:  
e = ∑ₙ₌₀^∞ 1 / n! = 1 + 1 / 1! + 1 / 2! + 1 / 3! + …

Этот ряд сходится к числу e .  
  
**9.Функция и область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.**

**1. Функция и область её определения**

**Функция**— это правило, которое устанавливает соответствие между элементами двух множеств. Если f — функция, то для каждого элемента x из множества X (область определения функции) существует единственный элемент y = f(x) из множества Y (область значений функции).  
**Область определения функции** — это множество всех значений x , для которых функция f(x) определена.

**2. Сложные функции**  
**Сложная функция** — это функция, которая получается из двух или более функций. Если у нас есть две функции f(x) и g(x) , то сложная функция h(x) = f(g(x)) называется композицией функций.

**Пример:**

**f(x) = sin(e^(x²))**  
  
**3. Обратные функции**  
**Обратная функция** — это функция, которая "отменяет" действие исходной функции. Если f — это функция, то её обратная функция обозначается как f⁻¹ . Для того чтобы функция имела обратную, она должна быть взаимно однозначной (инъективной и сюръективной).

**Пример**

Рассмотрим простую функцию:

**f(x) = 2x + 3**

Найдём обратную функцию

Чтобы найти обратную функцию, следуем следующим шагам:

*1. Заменим f(x) на y :*

**y = 2x + 3**

*2. Выразим x через y :*

**y - 3 = 2x**

**x = y - 3 / 2**

*3. Теперь заменим y на x (это будет наша обратная функция):*

**f⁻¹(x) = x - 3 / 2**

**4. График функции**  
**График функции** — это геометрическое представление всех пар (x, f(x)) . Он позволяет визуализировать поведение функции и её свойства.  
  
**5. Основные элементарные функции и их свойства**  
**1. Линейная функция:**   
   • Формула: f(x) = mx + b   
   • График: прямая линия.  
   • Свойства: наклон зависит от коэффициента m .  
  
**2. Квадратичная функция:**  
   • Формула: f(x) = ax² + bx + c   
   • График: парабола.  
   • Свойства: имеет вершину, направление зависит от знака a .  
  
**3. Экспоненциальная функция:**  
   • Формула: f(x) = aˣ   
   • График: быстро растет (если a > 1 ) или убывает (если 0 < a < 1 ).  
   • Свойства: всегда положительна, пересекает ось y в точке (0, 1) .

**10. Предел функции в точке и на бесконечности. Свойства пределов функции. Односторонние пределы.**

**Предел функции** — это значение, к которому стремится функция при приближении её аргумента к некоторому значению. Пределы используются для анализа поведения функций в окрестности определённых точек или при стремлении аргумента к бесконечности.  
  
**1. Предел функции в точке**  
**Определение предела:**   
Пусть f(x) — функция определённая в некоторой окрестности точки a , кроме, возможно, самой точки a . Мы говорим, что предел функции f(x) при x стремящемся к a равен L (записывается как lim(x → a) f(x) = L ), если для любого положительного числа ∊ существует такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству 0 < |x - a| < δ , выполняется неравенство |f(x) - L| < ∊ .

**2. Предел функции на бесконечности**  
Предел функции на бесконечности описывает поведение функции, когда аргумент стремится к бесконечности или минус бесконечности.  
  
**Определение предела на бесконечности:**  
Мы говорим, что предел функции f(x) при x стремящемся к бесконечности равен L (записывается как lim(x → +∞) f(x) = L ), если для любого положительного числа ∊ существует такое положительное число M , что для всех x > M выполняется неравенство |f(x) - L| < ∊ .

**3. Свойства пределов функции**  
 **1. Сумма пределов:**

**lim(x → a) (f(x) + g(x)) = lim(x → a) f(x) + lim(x → a) g(x)**  
**2. Разность пределов:**

**lim(x → a) (f(x) - g(x)) = lim(x → a) f(x) - lim(x → a) g(x)**  
**3. Произведение пределов:**

**lim(x → a) (f(x)g(x)) = lim(x → a) f(x) ⋅ lim(x → a) g(x)**  
**4. Частное пределов (при условии, что предел знаменателя не равен нулю):**

**lim(x → a) ((f(x) / g(x))) = lim(x → a) f(x) / lim(x → a) g(x)**

**5. Предел константы:**

**lim(x → a) c = c**  
**6. Предел сложной функции:  
   Если g(x) → L₁ и f(y) → L₂, тогда:**

**lim(x → a) f(g(x)) = f(L₁)  
при условии, что f(y) непрерывна в точке L₁.**  
  
**4. Односторонние пределы**  
**Односторонний предел функции f(x)** при x стремящемся к значению a с правой стороны обозначается как lim(x → a⁺) f(x) . Это означает, что мы рассматриваем значения функции f(x) при x , которые находятся больше a , то есть x → a с положительной стороны. В этом случае мы анализируем, как функция ведёт себя, когда x приближается к a с увеличением.  
  
С другой стороны, односторонний предел при x стремящемся к a с левой стороны обозначается как lim(x → a⁻) f(x) . Здесь мы рассматриваем значения функции f(x) при x , которые меньше a , то есть x → a с отрицательной стороны. Это позволяет нам понять, какое значение принимает функция, когда мы подходим к a с уменьшением.  
  
Односторонние пределы особенно полезны в ситуациях, когда функция может иметь разное поведение с разных сторон точки. Например, в точках разрыва или в точках, где функция не определена. Рассмотрим функцию, которая имеет разрыв в точке a . Если левый предел lim(x → a⁻) f(x) и правый предел lim(x → a⁺) f(x) не равны между собой, то мы говорим о разрыве функции в этой точке. Если же оба предела равны, то можно сказать, что функция имеет предел в этой точке, и он равен общему пределу lim(x → a) f(x) = L , где L — это значение, к которому стремится функция.  
  
Односторонние пределы также играют важную роль в анализе производных и интегралов. Например, в определении производной используется понятие предела при стремлении к нулю. Если мы рассматриваем производную функции в точке a , то мы можем использовать односторонние пределы для определения её существования. Производная может существовать только если оба односторонних предела производной совпадают.  
  
Визуально односторонние пределы можно представить на графиках функций. Если вы нарисуете график функции и отметите точку a , вы сможете увидеть, как функция ведёт себя при приближении к этой точке с левой и правой стороны. Это наглядное представление помогает лучше понять концепцию односторонних пределов и их влияние на поведение функции.

Рассмотрим функцию f(x) = 1/x . Мы проанализируем односторонние пределы этой функции при x стремящемся к 0.  
  
1. **Правый односторонний предел**:   
   Мы хотим найти lim(x → 0⁺) f(x) :

lim(x → 0⁺) 1 / x

Когда x стремится к 0 с правой стороны (то есть x положительное и очень маленькое), значение функции f(x) становится очень большим, стремится к +∞ :

lim(x → 0⁺) 1 / x = +∞

2. **Левый односторонний предел**:  
   Теперь найдем lim(x → 0⁻) f(x) :

lim(x → 0⁻) 1 / x

Когда x стремится к 0 с левой стороны (то есть x отрицательное и очень маленькое), значение функции f(x) становится очень большим по модулю, но отрицательным, стремится к -∞ :

lim(x → 0⁻) 1 / x = -∞

Таким образом, мы видим, что односторонние пределы функции f(x) = 1/x при x → 0 различны:  
• lim(x → 0⁺) f(x) = +∞   
• lim(x → 0⁻) f(x) = -∞   
Это указывает на то, что функция имеет разрыв в точке x = 0 .

11. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций, классификация. Эквивалентные функции

**Бесконечно большие и бесконечно малые функции** — это концепции, которые часто используются в математическом анализе, особенно в контексте пределов и асимптотического поведения функций.  
Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x → a , если:

**lim(x → a) f(x) = 0**  
*Примеры бесконечно малых функций:***1. f(x) = x - a при x → a   
2. f(x) = sin(x) при x → 0**  
Функция g(x) называется **бесконечно большой** при x → a , если:

**lim(x → a) g(x) = +∞ или lim(x → a) g(x) = -∞***Примеры бесконечно больших функций:*  
**1. g(x) = 1/(x - a) при x → a   
2. g(x) = eˣ при x → +∞**  
**Для сравнения бесконечно малых функций используются следующие обозначения:**

**• f(x) = o(g(x)) при x → a , если**

**lim(x → a) f(x) / g(x) = 0**Это означает, что функция f(x) стремится к нулю быстрее, чем g(x) .  
  
**• f(x) = O(g(x)) при x → a , если**

**limsup\_(x → a) (| f(x) / g(x) )| < +∞**Это обозначает, что функция f(x) не убывает быстрее, чем g(x) .  
  
**Две функции f(x) и g(x) называются эквивалентными при x → a , если:**

**lim(x → a) f(x) / g(x) = 1**Это обозначается как:

**f(x) ∼ g(x) (x → a)**Эквивалентные функции имеют одинаковое асимптотическое поведение в окрестности точки a .  
  
**Бесконечно малые функции можно классифицировать по их порядку:**  
1. Первый порядок: f(x) = o(1)   
2. Второй порядок: f(x) = o(g(x)) , где g(x) = x²   
3. Третий порядок: f(x) = o(h(x)) , где h(x) = x³   
И так далее.

**Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.**

**Замечательные пределы** — это предельные соотношения, которые часто используются в математическом анализе, особенно в курсе математического анализа и при решении пределов. Два наиболее известных и часто упоминаемых предела — это первый и второй замечательные пределы.  
**Первый замечательный предел**  
Первый замечательный предел формулируется следующим образом:

**lim(x → 0) sin x / x = 1**Этот предел показывает, что функция sin x стремится к x при x стремящемся к нулю.  
  
**Второй замечательный предел**  
Второй замечательный предел имеет следующий вид:

**lim(x → 0) 1 - cos x / x² = 1 / 2**  
Этот предел используется для анализа поведения функции cos x при x → 0 .  
  
**Применение**  
• Исчисление производных и интегралов.  
• Решение задач на нахождение пределов.  
• Исследование поведения тригонометрических функций в окрестности нуля.

**13.Непрерывность функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Теорема Больцано-Коши. Классификация точек разрыва. Равномерная непрерывность функции**

Функция f(x) называется **непрерывной в точке x**₀ , если выполняются три условия:  
*1. f(x₀) определена.  
2. Существует предел lim(x → x₀) f(x) .  
3. lim(x → x₀) f(x) = f(x₀) .*  
  
Функция называется **непрерывной на множестве** (например, на отрезке [a, b]), если она непрерывна в каждой точке этого множества.  
  
**Свойства функций, непрерывных на отрезке**1. Свойство промежуточных значений: Если функция непрерывна на отрезке [a, b] и N — любое значение между f(a) и f(b) , то существует хотя бы одна точка c ∈ (a, b) , такая что f(c) = N   
2. Компактность: Непрерывная функция на замкнутом и ограниченном множестве (отрезке) достигает своих крайних значений (максимума и минимума).  
3. Сумма, произведение и композиция: Если функции f и g непрерывны на отрезке, то:  
   • f + g и f ⋅ g также непрерывны на этом отрезке.  
   • Если g(x) непрерывна и не равна нулю, то f/g также непрерывна.  
  
**Теорема Вейерштрасса**  
Теорема Вейерштрасса утверждает, что если функция f(x) непрерывна на замкнутом отрезке [a, b], то она достигает своего максимума и минимума на этом отрезке. То есть существуют такие точки cₘₐₓ, cₘᵢₙ ∈ [a, b] , что:  
**f(cₘₐₓ) = max\_(x ∈ [a, b]) f(x)**

**f(cₘᵢₙ) = min\_(x ∈ [a, b]) f(x)**

Т.е. эта теорема утверждает, что если последовательность непрерывных функций на компактном множестве сходится к некоторой функции, то эта предельная функция также будет непрерывной. Более формально, пусть K — компактное множество в евклидовой пространстве, а fₙ: K → 𝕉 — последовательность непрерывных функций, которая равномерно сходится к функции f на этом множестве. Тогда функция f также будет непрерывной на K .  
  
Чтобы понять это утверждение более глубоко, важно рассмотреть, что такое равномерная сходимость. Последовательность функций fₙ равномерно сходится к функции f на множестве K , если для любого ∊ > 0 существует такое натуральное число N , что для всех n ≥ N и для всех x ∈ K выполняется неравенство |fₙ(x) - f(x)| < ∊ . Это означает, что разница между fₙ(x) и f(x) может быть сделана arbitrarily маленькой одновременно для всех x из K , что является более строгим условием, чем обычная точечная сходимость.  
  
Теперь рассмотрим, почему это важно и какие последствия вытекают из теоремы Вейерштреса. Одним из основных следствий является то, что если у нас есть последовательность непрерывных функций, которая равномерно сходится, то мы можем обменять пределы и интегралы или пределы и производные. Это свойство делает теорему крайне полезной в различных областях анализа, включая теорию интегрируемых функций и дифференциальные уравнения.  
Теорема Вейерштреса также подразумевает, что на компактных множествах непрерывные функции обладают некоторыми свойствами, которые недоступны на более общих множествах. Например, на открытых множествах или даже на ограниченных, но некомпактных множествах равномерная сходимость не гарантирует сохранение непрерывности предельной функции.  
Важным аспектом теоремы является ее связь с понятием компактификации. Компактные множества в аналитическом смысле обладают свойствами, которые позволяют применять различные методы анализа. Например, в случае конечномерных пространств компактность эквивалентна замкнутости и ограниченности. Это позволяет использовать теорему Вейерштреса для работы с различными классами функций и их предельными поведениями

**Пример**  
Пусть K = [0, 1] — компактное множество, и рассмотрим последовательность функций:

**fₙ(x) = xⁿ / 1 + xⁿ**  
для x ∈ [0, 1] .

**Шаг 1: Исследуем предел функции**  
  
Мы хотим выяснить, к какой функции сходится последовательность fₙ(x) при n → ∞ .  
• Если 0 ≤ x < 1 , то xⁿ → 0 при n → ∞ . Следовательно, fₙ(x) → 0 .  
• Если x = 1 , то fₙ(1) = ½ для всех n .  
  
Таким образом, можно записать предельную функцию:

f(x) =

0, если 0 ≤ x < 1

1 / 2, если x = 1

▎**Шаг 2: Проверяем равномерную сходимость**  
  
Теперь нужно проверить, сходится ли последовательность fₙ(x) равномерно к функции f(x) . Для этого найдем:

**|fₙ(x) - f(x)| = xⁿ / 1 + xⁿ, если 0 ≤ x < 1**

**1 / 2 - 1 / 2 = 0, если x = 1**  
Для 0 ≤ x < 1 :

**|fₙ(x)| = xⁿ / 1 + xⁿ**  
Заметим, что |fₙ(x)| < xⁿ для x < 1 . Таким образом, на множестве [0, 1) :

|fₙ(x)| < xⁿ

**Шаг 3: Оценка максимума**  
Теперь нам нужно найти максимум:

Mₙ = max\_(x ∈ [0, 1]) |fₙ(x) - f(x)| = max\_(x ∈ [0, 1)) |fₙ(x)| = max\_(x ∈ [0, 1)) xⁿ / 1 + xⁿ  
Поскольку xⁿ → 0 при n → ∞ для всех x < 1 , мы можем сделать вывод, что:

Mₙ = max\_(x ∈ [0, 1)) |fₙ(x)| → 0  
при n → ∞ .

**Теорема Больцано-Коши**Теорема Больцано-Коши, также известная как теорема о промежуточных значениях утверждает, что если функция непрерывна на закрытом интервале и принимает разные значения на концах этого интервала, то она принимает все значения между этими двумя значениями хотя бы один раз.  
Формально, пусть f — непрерывная функция на закрытом интервале [a, b], где f(a) и f(b) имеют разные знаки, то есть f(a) < 0 и f(b) > 0 или наоборот. В этом случае существует хотя бы одна точка c ∈ (a, b) , такая что f(c) = 0 . Это означает, что график функции пересекает ось абсцисс в некоторой точке между a и b .  
Теорема Больцано-Коши имеет несколько важных следствий и приложений. Одним из них является использование этой теоремы для нахождения корней уравнений. Например, если необходимо найти корень уравнения f(x) = 0 , можно использовать метод деления отрезка пополам (метод бисекции), который заключается в том, что мы последовательно делим интервал пополам и проверяем, в какой из полученных подинтервалов находится корень.  
Кроме того, теорема Больцано-Коши тесно связана с понятием непрерывности функции. Она подчеркивает важность свойства непрерывности для анализа поведения функций. Если функция не является непрерывной на рассматриваемом интервале, то утверждение теоремы может не выполняться. Например, если функция имеет разрыв, она может не принимать некоторые значения между двумя значениями на концах интервала.  
Эта теорема также служит основой для других более сложных результатов в математическом анализе, таких как теорема о существовании предела и теорема о единственности предела. В частности, она лежит в основе доказательства теоремы о фиксированной точке Больцано — Коши, которая утверждает, что любое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет единственную фиксированную точку.

**Пример применения**: Рассмотрим функцию f(x) = x² - 4 на интервале [-3, 3]. Мы видим, что f(-3) = 5 > 0 и f(3) = 5 > 0 , но f(-2) = 0 . Здесь функция непрерывна на интервале, и по теореме Больцано-Коши мы можем утверждать, что существует хотя бы одна точка c ∈ (-2, 0) , такая что f(c) = 0

**Классификация точек разрыва**  
Точки разрыва функции можно классифицировать следующим образом:  
**1. Разрыв первого рода**: Если предел функции с обеих сторон в точке существует, но не равен значению функции или не существует. Например, если f(x₀) не определена, но существуют пределы:  
  • Односторонний предел слева и справа существуют и конечны.  
**2. Разрыв второго рода:** Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности.  
**3. Разрыв устранимый:** Если предел функции в точке существует и конечен, но не равен значению функции. В этом случае можно "устранить" разрыв, определив функцию в этой точке как значение предела.  
  
**Равномерная непрерывность функции**  
Функция f(x) называется равномерно непрерывной на множестве D , если для любого ∊ > 0 существует такое δ > 0 , что для любых x₁, x₂ ∈ D :

***|x₁ - x₂| < δ ⇒ |f(x₁) - f(x₂)| < ∊***

Равномерная непрерывность сильнее обычной непрерывности, поскольку здесь одно и то же значение δ подходит для всех точек из множества D . Примером функции, которая непрерывна, но не равномерно непрерывна, является функция f(x) = x² на интервале [0, n] , где n → +∞ . Однако любая непрерывная функция на замкнутом отрезке является равномерно непрерывной (по теореме Вейерштрасса)

**14.Производная функции одной переменной, её геометрический и механический смысл. Правила нахождения производной.**

**Определение производной:** Производная функции f(x) в точке x₀ определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда это приращение стремится к нулю:  
**f'(x₀) = lim(h → 0) f(x₀ + h) - f(x₀) / h**

Если этот предел существует, то говорят, что функция f(x) дифференцируема в точке x₀

**Геометрически производная функции** в точке x₀ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке. Это означает, что производная показывает, насколько быстро изменяется значение функции при изменении аргумента:  
• Если f'(x₀) > 0 , то функция возрастает в окрестности точки x₀ .  
• Если f'(x₀) < 0 , то функция убывает.  
• Если f'(x₀) = 0 , то в этой точке может находиться локальный максимум, минимум или точка перегиба.  
  
В **механике производная** может быть интерпретирована как скорость изменения. Например:  
• Если s(t) — это функция, описывающая положение тела в зависимости от времени t , то производная s'(t) — это скорость тела в момент времени t .  
• Если v(t) — скорость, то производная скорости v'(t) — это ускорение.  
Таким образом, производная описывает, как быстро изменяется одно значение относительно другого.  
 **Правила нахождения производной**  
**1. Правило суммы:**

**(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)**

**2. Правило разности:**

**(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)**

**3. Правило произведения:**

**(f ⋅ g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)**

**4. Правило частного:**

**((f / g))'(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) / g²(x), g(x) ≠ 0**

**5. Правило цепи (для составных функций):  
   Если y = f(g(x)) , то**

**y' = f'(g(x)) ⋅ g'(x)**

**15.** **Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Производные функций, заданных неявно и параметрически, логарифмическая производная.**

**Правило цепи:** Если y = f(g(x)) , где f и g — дифференцируемые функции, то производная y по x вычисляется по формуле:

**dy / dx = f'(g(x)) ⋅ g'(x)**  
Это правило позволяет находить производные составных функций, применяя производные внешней и внутренней функций.  
  
**Производная обратной функции**  
Если функция y = f(x) имеет обратную функцию x = f⁻¹(y) , то производная обратной функции может быть найдена по следующей формуле:  
**dy / dx = 1 / f'(f⁻(y))}**

Это означает, что чтобы найти производную обратной функции в точке, нужно взять производную оригинальной функции в точке, соответствующей значению обратной функции.  
  
Производные основных элементарных функций  
Вот производные некоторых стандартных элементарных функций:  
  
1. Степенные функции:  
  
   • (xⁿ)' = nxⁿ⁻¹ , где n — любое действительное число.  
  
2. Тригонометрические функции:  
  
   • (sin x)' = cos x   
  
   • (cos x)' = -sin x   
  
3. Экспоненциальные и логарифмические функции:  
  
   • (eˣ)' = eˣ   
  
   • (aˣ)' = aˣ ln a , где a > 0, a ≠ 1   
  
   • (ln x)' = 1/x , для x > 0   
  
Производные функций, заданных неявно  
Для нахождения производной неявно заданной функции, например, если функция задана уравнением F(x, y) = 0 , используется метод неявной дифференциации.   
   Если дано уравнение F(x, y) = 0 , то для нахождения производной y' = dy/dx :  
dF / dx = 0  
где:

dF / dx = Fₓ + Fᵧ dy / dx  
где Fₓ = (∂ F)/(∂ x) и Fᵧ = (∂ F)/(∂ y) .

Решаем это уравнение относительно y' :Fᵧ dy / dx = -Fₓ  
Таким образом:

dy / dx = -Fₓ / Fᵧ

**Производные параметрически заданных функций**  
Если функция задана параметрически через два параметра t :  
x = g(t), y = f(t)

то производная y' = dy/dx вычисляется по формуле:  
dy / dx = dy/dt / dx/dt = f'(t) / g'(t)

где f'(t) и g'(t) — производные функций по параметру t .  
  
**Логарифмическая производная**  
Логарифмическая производная используется для нахождения производной произведения или частного функций. Если функция задана как y = f(x) , то логарифмическая производная определяется следующим образом:  
d / dx(ln y) = 1 / y dy / dx

Таким образом, можно выразить производную через логарифмическую производную:  
dy / dx = y ⋅ d / dx(ln y)

**16. Дифференцируемые функции. Дифференциал. Свойства дифференциала. Применения дифференциала в приближённых вычислениях.**

**Определение:** Функция f(x) называется дифференцируемой в точке x₀ , если существует предел

**f'(x₀) = lim(h → 0) f(x₀ + h) - f(x₀) / h**  
Если функция дифференцируема в точке, то она также непрерывна в этой точке. Однако обратное не всегда верно: непрерывная функция может быть не дифференцируемой.  
  
**Определение:** Дифференциал функции f(x) в точке x₀ обозначается как df и определяется как

**df = f'(x₀) ⋅ dx**  
где dx — это малое приращение аргумента x . Таким образом, дифференциал представляет собой линейное приближение изменения функции при малом изменении аргумента.  
  
**Свойства дифференциала**

1**. Линейность**: Если f(x) и g(x) — дифференцируемые функции, то для любых констант a и b :

**d(af + bg) = a ⋅ df + b ⋅ dg**

2. **Произведение**: Если u(x) и v(x) — дифференцируемые функции, то:

**d(uv) = udv + vdu**

3. **Частное**: Если u(x) и v(x) — дифференцируемые функции и v(x) ≠ 0 :

**d((u / v)) = v du - u dv / v²**

4**. Композиты**: Для составной функции y = f(g(x)) :

**dy = f'(g(x)) ⋅ dg**  
5. **Неявная функция:** Если функция задана неявно уравнением F(x, y) = 0 , то:

**dy = -Fₓ / Fᵧ dx**

**17.Производные и дифференциалы высших порядков.**

**Производные высших порядков**  
  
1. Первая производная функции f(x) обозначается как f'(x) и представляет собой скорость изменения функции. Она определяется как предел:

**f'(x) = lim(h → 0) f(x + h) - f(x) / h**  
2. Вторая производная обозначается как f''(x) и является производной от первой производной:

**f''(x) = d / dx f'(x)**  
3. Третья производная обозначается как f'''(x) и является производной от второй производной:

**f'''(x) = d / dx f''(x)**  
4. В общем случае, n -я производная функции f(x) обозначается как f⁽ⁿ⁾(x) и определяется рекурсивно:

**f⁽ⁿ⁾(x) = d / dx f⁽ⁿ⁻¹⁾(x)**

**Дифференциалы высших порядков**  
Дифференциал функции также можно обобщить на высшие порядки.   
1. Первый дифференциал функции f(x) обозначается как df и определяется как:

df = f'(x) dx  
2. Второй дифференциал обозначается как d²f и выражается через первую производную:

d²f = f''(x) (dx)²  
3. В общем случае, n -й дифференциал функции f(x) обозначается как dⁿ f и определяется следующим образом:

dⁿ f = f⁽ⁿ⁾(x) (dx)ⁿ

**18.Правило Лопиталя. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши)**  
**Правило Лопиталя** используется для вычисления пределов, которые имеют неопределенные формы 0/0 или (∞)/(∞) . Оно гласит:  
Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , и g'(x) ≠ 0 в этой окрестности (кроме, возможно, в самой точке a ), и при этом:

**lim(x → a) f(x) = 0 и lim(x → a) g(x) = 0**  
или

**lim(x → a) f(x) = ± ∞ и lim(x → a) g(x) = ± ∞,**  
то:

**lim(x → a) f(x) / g(x) = lim(x → a) f'(x) / g'(x),**  
при условии, что предел справа существует или равен ± ∞ .  
Это правило может быть применено несколько раз, если результат по-прежнему имеет неопределенную форму.  
  
**Основные теоремы дифференциального исчисления**  
*1. Теорема Ферма:*  
   Если функция f(x) имеет локальный экстремум в точке c (максимум или минимум), и f'(c) существует, то f'(c) = 0 . Это условие необходимо, но не всегда достаточное.  
  
*2. Теорема Ролля:*  
   Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] , дифференцируема на интервале (a, b) , и f(a) = f(b) , то существует хотя бы одна точка c ∈ (a, b) , такая что f'(c) = 0 .  
  
*3. Теорема Лагранжа (о среднем значении):*  
   Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b) , то существует хотя бы одна точка c ∈ (a, b) , такая что:

**f'(c) = f(b) - f(a) / b - a.**  
Это означает, что в какой-то момент касательная к графику функции параллельна секущей, соединяющей точки (a, f(a)) и (b, f(b)) .  
  
4. Теорема Коши:  
   Эта теорема является обобщением теоремы Лагранжа. Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] , дифференцируемы на интервале (a, b) , и g'(x) ≠ 0 для всех x ∈ (a, b) , то существует хотя бы одна точка c ∈ (a, b) , такая что:

**f'(c) / g'(c) = f(b) - f(a) / g(b) - g(a).**

**19.Формула Тейлора. Формула Тейлора для основных элементарных функций**

**Формула Тейлора**  
Если функция f(x) имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки a , то разложение функции в ряд Тейлора можно записать как:

**f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a) / 2!(x - a)² + f'''(a) / 3!(x - a)³ + … + f⁽ⁿ⁾(a) / n!(x - a)ⁿ + Rₙ(x),**где Rₙ(x) — остаточный член, который показывает, насколько хорошо полином приближает функцию. Остаточный член можно представить в различных формах, одной из которых является:

**Rₙ(x) = f⁽ⁿ⁺¹⁾(c) / (n+1)!(x - a)ⁿ⁺¹,**где c находится между a и x .  
  
**Формулы Тейлора для основных элементарных функций**  
**1. Экспоненциальная функция  eˣ :**

**eˣ = 1 + x + x² / 2! + x³ / 3! + x⁴ / 4! + …**Для разложения в окрестности x = 0 :

**eˣ = ∑ₙ₌₀^∞ xⁿ / n!**

**2. Синус  sin(x) :**

**sin(x) = x - x³ / 3! + x⁵ / 5! - x⁷ / 7! + …**Для разложения в окрестности x = 0 :

**sin(x) = ∑ₙ₌₀^∞ (-1)ⁿ x²ⁿ⁺¹ / (2n+1)!**

**3. Косинус  cos(x) :**

**cos(x) = 1 - x² / 2! + x⁴ / 4! - x⁶ / 6! + …**Для разложения в окрестности x = 0 :

**cos(x) = ∑ₙ₌₀^∞ (-1)ⁿ x²ⁿ / (2n)!**

**4. Логарифм  ln(1+x) (для |x| < 1 ):**

**ln(1+x) = x - x² / 2 + x³ / 3 - x⁴ / 4 + …**Для разложения в окрестности x = 0 :

**ln(1+x) = ∑ₙ₌₁^∞ (-1)ⁿ⁻¹ xⁿ / n**

**5. Арктангенс  arctan(x) :**

**arctan(x) = x - x³ / 3 + x⁵ / 5 - x⁷ / 7 + …**Для разложения в окрестности x = 0 :

**arctan(x) = ∑ₙ₌₀^∞ (-1)ⁿ x²ⁿ⁺¹ / 2n+1**

**20.Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие, достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции, дифференцируемой на отрезке**

Функция f(x) называется монотонной на интервале, если она либо не убывает, либо не возрастает на этом интервале.  
  
**1. Монотонно возрастающая функция:** функция f(x) называется монотонно возрастающей на интервале (a, b) , если для любых x₁, x₂ ∈ (a, b) таких, что x₁ < x₂ , выполняется неравенство f(x₁) ≤ f(x₂) .  
**2. Монотонно убывающая функция:** функция f(x) называется монотонно убывающей на интервале (a, b) , если для любых x₁, x₂ ∈ (a, b) таких, что x₁ < x₂ , выполняется неравенство f(x₁) ≥ f(x₂) .  
  
***Необходимое и достаточные условия для монотонности***  
*1. Необходимое условие:*

Если функция f(x) монотонна на интервале (a, b) , то её производная f'(x) должна быть:  
   • Неположительной ( f'(x) ≥ 0 ) для монотонно возрастающей функции.  
   • Неположительной ( f'(x) ≤ 0 ) для монотонно убывающей функции.

*2. Достаточные условия:*  
   • Если f'(x) > 0 для всех x ∈ (a, b) , то функция f(x) строго возрастает на этом интервале.  
   • Если f'(x) < 0 для всех x ∈ (a, b) , то функция f(x) строго убывает на этом интервале.  
   • Если f'(x) = 0 на некотором интервале и производная меняет знак на границах этого интервала, то в точках, где производная меняет знак, могут находиться экстремумы функции.  
  
***Экстремумы функции***  
**Экстремумы функции** — это точки, в которых функция достигает локальных максимумов или минимумов.  
**1. Необходимое условие для экстремума:** Если функция f(x) имеет локальный экстремум в точке x₀ , то производная в этой точке равна нулю:

f'(x₀) = 0.  
**2. Достаточные условия для экстремума:**  
   • Если f'(x₀) = 0 и f''(x₀) > 0 , то в точке x₀ находится локальный минимум.  
   • Если f'(x₀) = 0 и f''(x₀) < 0 , то в точке x₀ находится локальный максимум.  
   • Если f'(x₀) = 0 и f''(x₀) = 0, то необходимо использовать более высокие производные или другие методы для определения экстремума.  
  
***Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке***  
Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции f(x) , дифференцируемой на отрезке [a, b] :  
*1. Находим критические точки:*  
   • Вычисляем производную f'(x) .  
   • Находим точки, где f'(x) = 0 или где производная не существует на интервале (a, b) .  
  
*2. Сравниваем значения функции:*  
   • Вычисляем значения функции в критических точках и на границах отрезка:  
     • f(a)   
     • f(b)   
     • Значения функции в критических точках внутри отрезка.  
  
*3. Определяем экстремумы:*  
   • Наибольшее значение из найденных — это наибольшее значение функции на отрезке.  
   • Наименьшее значение из найденных — это наименьшее значение функции на отрезке.

**21.Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функции. Понятие об асимптотическом разложении. Общая схема исследования функции и построение ее графика.**

**1. Выпуклая функция**: Функция f(x) называется выпуклой на интервале (a, b) , если её вторая производная f''(x) ≥ 0 для всех x ∈ (a, b) . Это означает, что график функции "смотрит вверх".  
**2. Вогнутая функция:** Функция f(x) называется вогнутой на интервале (a, b) , если её вторая производная f''(x) ≤ 0 для всех x ∈ (a, b) . Это означает, что график функции "смотрит вниз".  
**Точка перегиба** — это точка на графике функции, в которой функция меняет свою выпуклость:  
• Чтобы найти точки перегиба, необходимо:  
*1. Найти вторую производную f''(x) .  
  2. Найти точки, в которых f''(x) = 0 или не существует.  
  3. Проверить знак второй производной по обе стороны от найденных точек. Если знак меняется, то это точка перегиба.*  
  
**Асимптоты** — это линии, к которым график функции приближается, но никогда не пересекает или пересекает в пределе.  
**1. Вертикальные асимптоты**: Возникают при значениях x = a , когда f(x) → ± ∞ при x → a . Для их нахождения ищем точки, в которых функция не определена и на которых пределы функции стремятся к бесконечности.  
**2. Горизонтальные асимптоты**: Определяются поведением функции при x → ± ∞ . Если

**lim(x → ± ∞) f(x) = L,**  
то прямая y = L является горизонтальной асимптотой.  
3. Наклонные асимптоты: Если

**lim(x → ∞) [f(x) - mx - b] = 0,**  
то прямая y = mx + b является наклонной асимптотой.  
  
**Асимптотическое разложение функции** — это представление функции в виде суммы членов, которые описывают поведение функции при стремлении переменной к некоторому пределу (чаще всего к бесконечности). Для функции f(x) , асимптотическое разложение может выглядеть так:

**f(x) ∼ g₁(x) + g₂(x) + g₃(x) + ...,**  
где gᵢ(x) — это последовательность функций, которая дает хорошее приближение к f(x) при больших значениях x .  
  
**Общая схема исследования функции и построение её графика**  
*1. Определение области определения:* Найти все значения x , для которых функция определена.  
*2. Нахождение нулей функции:* Решить уравнение f(x) = 0 .  
*3. Исследование знака функции:* Определить интервалы, на которых функция положительна или отрицательна.  
*4. Нахождение производных:*  
   • Первая производная f'(x) : найти критические точки (где f'(x) = 0 или не существует).  
   • Определить интервалы монотонности (возрастание/убывание).  
*5. Выпуклость и вогнутость:*  
   • Вторая производная f''(x) : найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости.  
*6. Асимптоты:* Найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.  
*7. Построение графика:*  
   • Нанести найденные нули, критические точки, точки перегиба и асимптоты.  
   • Определить поведение функции на каждом из интервалов.  
   • Соединить точки, учитывая информацию о монотонности и выпуклости.

**22.Понятие функции многих переменных, ее область определений, график. Линии уровня.**

**Функция многих переменных** — это функция, которая зависит от двух или более независимых переменных. Например, функция f(x, y) зависит от двух переменных x и y . В общем случае функция f может зависеть от n переменных и записывается как:

**f: xⁿ → x**  
где n — количество переменных.  
  
**Область определения функции многих** переменных — это множество всех возможных значений входных переменных, для которых функция определена. Например, для функции **f(x, y) = 1/(x² + y²)** , область определения будет:

**D = { (x, y) ∈ 𝕉² : x² + y² ≠ 0 }**  
Это означает, что функция не определена в точке (0, 0) , но определена во всех остальных точках плоскости.  
  
**График функции многих переменных f(x, y)** представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Для функции z = f(x, y) , график можно представить как множество точек (x, y, z) , где z является значением функции для заданных x и y .   
График функции можно визуализировать в виде поверхности, которая поднимается или опускается в зависимости от значений функции. Например, для функции f(x, y) = x² + y² график будет представлять собой параболическую поверхность.   
  
**Линии уровня (или контурные линии) функции двух переменных f(x, y)** — это кривые на плоскости xy , которые представляют собой множество точек, где функция принимает одно и то же значение. Для фиксированного значения c :

**f(x, y) = c**  
Линии уровня помогают визуализировать поведение функции и понять, как она изменяется в зависимости от переменных.

**23.Предел и непрерывность функции нескольких переменных.  
Локальные свойства непрерывных функций**

Предел функции нескольких переменных  f(x, y) (или f(𝐱) , если рассматривать n переменных) в точке (a, b) определяется как:

**lim((x, y) → (a, b)) f(x, y) = L**  
Это означает, что для любого ∊ > 0 существует такое δ > 0 , что если 0 < √((x - a)² + (y - b)²) < δ , то выполняется неравенство:

|f(x, y) - L| < ∊

Таким образом, мы можем сказать, что функция f стремится к значению L , когда точки (x, y) приближаются к (a, b) .

**Непрерывность функции нескольких переменных**  
Функция f(x, y) непрерывна в точке (a, b) , если:  
*1. f(a, b) определена.  
2. lim((x, y) → (a, b)) f(x, y) = f(a, b) .*  
Это означает, что значение функции в точке совпадает с пределом функции при приближении к этой точке.  
  
**Пример непрерывной функции**  
Функция:

f(x, y) = x² + y²  
непрерывна во всех точках (x, y) , так как она является полиномом.  
  
**Локальные свойства непрерывных функций**  
*1. Свойство локальной ограниченности*: Если функция непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве (компактном), то она достигает своих максимума и минимума на этом множестве.  
*2. Свойство промежуточных значений:* Если функция непрерывна на отрезке и принимает значения f(a) и f(b) , то она принимает все значения между f(a) и f(b) .  
*3. Сложение и произведение:* Если функции f(x,y) и g(x,y) непрерывны в точке (a,b) , то их сумма и произведение также будут непрерывны в этой точке:  
**• f + g   
   • f ⋅ g**   
*4. Композиция:* Если функция g(x,y) непрерывна в точке (a,b) , а функция f(u,v) непрерывна в точке (g(a,b)) , то композиция f(g(x,y)) будет непрерывна в точке (a,b) .  
*5. Локальная линейность:* В окрестности точки непрерывной функции можно аппроксимировать ее с помощью линейной функции (например, через производные).

**24.Частные производные первого порядка. Геометрический смысл**

**Частные производные функции нескольких** переменных описывают, как функция изменяется при изменении одной из переменных, в то время как остальные переменные остаются фиксированными. Если у нас есть функция f(x, y) , частные производные первого порядка определяются следующим образом:  
• Частная производная по x :

∂ f / ∂ x = lim(Δ x → 0) f(x + Δ x, y) - f(x, y) / Δ x  
• Частная производная по y :

∂ f / ∂ y = lim(Δ y → 0) f(x, y + Δ y) - f(x, y) / Δ y

**Геометрически частные производные** представляют собой наклон касательной плоскости к графику функции в данной точке.  
1. Частная производная по x :  
  
   • Она показывает, как изменяется значение функции f при изменении x , когда y остается постоянным. Это можно интерпретировать как наклон функции вдоль направления оси x . Если мы зафиксируем y и будем изменять x , то частная производная по x будет равна угловому коэффициенту касательной линии к кривой, полученной при пересечении графика функции с плоскостью y = c (где c — фиксированное значение).  
  
2. Частная производная по y :  
   • Аналогично, частная производная по y показывает, как изменяется значение функции при изменении y , когда x остается постоянным. Это наклон функции вдоль направления оси y . Если мы фиксируем x и изменяем y , то частная производная по y будет равна угловому коэффициенту касательной линии к кривой, полученной при пересечении графика функции с плоскостью x = c .

**25.Частные производные высших порядков. Независимость смешанной производной от порядка дифференцирования**

**Частные производные высших порядков** — это производные, которые вычисляются от частных производных первого порядка. Они используются для анализа функций нескольких переменных и могут помочь в понимании их поведения, особенно в контексте оптимизации и анализа кривизны.  
  
Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то:  
1. Вторая частная производная по x :

∂² f / ∂ x² = ∂ / ∂ x (( ∂ f / ∂ x ))  
2. Вторая частная производная по y :

∂² f / ∂ y² = ∂ / ∂ y (( ∂ f / ∂ y ))  
3. Смешанные производные:  
• Первая частная производная по x , затем по y :

∂² f / ∂ y ∂ x = ∂ / ∂ y (( ∂ f / ∂ x ))  
• Первая частная производная по y , затем по x :

∂² f / ∂ x ∂ y = ∂ / ∂ x (( ∂ f / ∂ y ))

**Независимость смешанной производной от порядка дифференцирования**  
Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные второго порядка, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Это означает, что:

**∂² f / ∂ x ∂ y = ∂² f / ∂ y ∂ x**  
**Условия**  
Для того чтобы это свойство выполнялось, необходимо, чтобы частные производные f были непрерывными в окрестности точки, где они вычисляются. Если эти условия выполнены, то порядок дифференцирования не влияет на значение смешанной производной.

**26.Полное приращение функции двух независимых переменных, полный дифференциал**

Рассмотрим функцию f(x, y) , где x и y — независимые переменные. Полное приращение функции f при изменении x на Δ x и y на Δ y можно выразить следующим образом:

**Δ f = f(x + Δ x, y + Δ y) - f(x, y)**  
Согласно теореме о полном приращении, это изменение может быть представлено как сумма изменения, вызванного изменением каждой переменной, а также с учетом взаимодействия между ними:

**Δ f = ∂ f / ∂ x Δ x + ∂ f / ∂ y Δ y + R**  
где R — остаточный член, который стремится к нулю при Δ x и Δ y стремящихся к нулю.  
  
**Полный дифференциал функции f(x, y)** обозначается как df и представляет собой линейное приближение изменения функции в окрестности точки (x, y) . Он определяется следующим образом:

**df = ∂ f / ∂ x dx + ∂ f / ∂ y dy**где:  
• dx и dy — бесконечно малые изменения переменных x и y .  
• (∂ f)/(∂ x) и (∂ f)/(∂ y) — частные производные функции f по переменным x и y .  
  
**Связь между полным приращением и полным дифференциалом**  
Когда мы рассматриваем малые изменения Δ x и Δ y , полный дифференциал можно рассматривать как приближенную оценку полного приращения:

**df ≈ Δ f**При этом, когда Δ x и Δ y стремятся к нулю, остаточный член R становится незначительным, и мы можем использовать полный дифференциал для оценки изменения функции.

**27.Геометрический смысл полного дифференциала, касательная и нормаль к графику функции двух независимых переменных**

Полный дифференциал функции двух переменных f(x, y) имеет важное геометрическое значение. Он представляет собой линейное приближение изменения функции в окрестности точки (x₀, y₀) .  
Для функции f(x, y) , полный дифференциал записывается как:

**df = ∂ f / ∂ x dx + ∂ f / ∂ y dy**  
Где:  
• **(∂ f)/(∂ x)** — частная производная по x (изменение функции при изменении x , когда y фиксировано).  
• (**∂ f)/(∂ y)** — частная производная по y (изменение функции при изменении y , когда x фиксировано).  
  
**Касательная плоскость** к графику функции z = f(x, y) в точке (x₀, y₀, z₀) = (x₀, y₀, f(x₀, y₀)) задается уравнением:

**z - z₀ = ∂ f / ∂ x(x₀, y₀)(x - x₀) + ∂ f / ∂ y(x₀, y₀)(y - y₀)**

Это уравнение описывает плоскость, касающуюся графика функции в данной точке. Касательная плоскость является линейным приближением графика функции в окрестности точки (x₀, y₀) .  
  
**Нормаль к графику функции в точке (x₀, y₀, z₀)** — это вектор, перпендикулярный касательной плоскости. Нормальный вектор можно выразить через частные производные:

𝑁 = (( -∂ f / ∂ x(x₀, y₀), -∂ f / ∂ y(x₀, y₀), 1 ))  
Этот вектор указывает направление нормали к графику функции в данной точке.

**28.Дифференциалы высших порядков функции многих переменных**

Для функции двух переменных f(x, y) полный **дифференциал первого порядка** записывается как:

**df = ∂ f / ∂ x dx + ∂ f / ∂ y dy**  
Полный **дифференциал второго порядка** включает в себя не только первые производные, но и вторые производные. Он может быть записан в виде:

**d²f = ∂² f / ∂ x² (dx)² + 2∂² f / ∂ x ∂ y dx dy + ∂² f / ∂ y² (dy)²**  
Здесь:  
• (∂² f)/(∂ x²) — вторая частная производная по x ,  
• (∂² f)/(∂ y²) — вторая частная производная по y ,  
• (∂² f)/(∂ x ∂ y) — смешанная производная.  
  
**Общий случай**  
Для функции f(x₁, x₂, …, xₙ) полного дифференциала высшего порядка можно записать следующим образом:  
1. Первый дифференциал:

**df = ∑ᵢ₌₁ⁿ ∂ f / ∂ xᵢ dxᵢ**  
2. Второй дифференциал:

**d²f = ∑ᵢ₌₁ⁿ ∑ⱼ₌₁ⁿ ∂² f / ∂ xᵢ ∂ xⱼ dxᵢ dxⱼ**  
3. Третий дифференциал:

**d³f = ∑ᵢ₌₁ⁿ ∑ⱼ₌₁ⁿ ∑ₖ₌₁ⁿ ∂³ f / ∂ xᵢ ∂ xⱼ ∂ xₖ dxᵢ dxⱼ dxₖ**

**29.Дифференцирование сложных функций двух переменных**

**1. Частные производные**  
Для функции двух переменных f(x, y) частные производные определяются как:  
• Частная производная по x :

**∂ f / ∂ x = lim(Δ x → 0) f(x + Δ x, y) - f(x, y) / Δ x**

• Частная производная по y :

**∂ f / ∂ y = lim(Δ y → 0) f(x, y + Δ y) - f(x, y) / Δ y**

**2. Применение правила цепи**  
Когда функция зависит от других функций, используется правило цепи. Если у нас есть функция z = f(u, v) , где u = g(x, y) и v = h(x, y) , то полное дифференцирование z по x и y будет следующим:

**∂ z / ∂ x = ∂ f / ∂ u ∂ u / ∂ x + ∂ f / ∂ v ∂ v / ∂ x**

**∂ z / ∂ y = ∂ f / ∂ u ∂ u / ∂ y + ∂ f / ∂ v ∂ v / ∂ y**

**30.Дифференцирование неявных функций**

**Неявное дифференцирование** — это метод, используемый для нахождения производных функций, которые заданы неявно, т.е. в виде уравнения, связывающего переменные. Например, у нас может быть уравнение вида F(x, y) = 0 , где y не выражается явно через x

Основные шаги неявного дифференцирования  
1. Запишите уравнение: Начните с уравнения, которое связывает переменные x и y .  
   Например:

F(x, y) = x² + y² - 1 = 0  
Это уравнение описывает окружность радиуса 1.  
  
2. Дифференцируйте обе стороны уравнения по x : Используйте правило производной для сложной функции (правило цепи). Не забудьте, что y является функцией от x , поэтому при дифференцировании вам нужно будет умножать на производную y по x (обозначаемую как dy/dx ).  
   Применим это к нашему примеру:

d / dx(x²) + d / dx(y²) - d / dx(1) = 0  
Это дает:

2x + 2y dy / dx = 0

3. Решите полученное уравнение для dy/dx : Изолируйте производную.  
   Продолжая с нашего примера:

2y dy / dx = -2x  
Делим обе стороны на 2y :

dy / dx = -x / y

**31.Необходимое и достаточное условия существования экстремума  
функции двух переменных**Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных являются важными концепциями в математическом анализе, особенно в области оптимизации. Для функции двух переменных f(x, y) экстремум может быть достигнут в точке, если выполняются определенные условия, связанные с производными функции.  
  
Сначала необходимо рассмотреть понятие критической точки. Критической точкой функции f(x, y) называется такая точка (x₀, y₀) , в которой обе частные производные первого порядка равны нулю. То есть, необходимо, чтобы выполнялись условия (∂ f)/(∂ x)(x₀, y₀) = 0 и (∂ f)/(∂ y)(x₀, y₀) = 0 . Это условие является необходимым, но не достаточным для существования экстремума. Это означает, что если функция имеет экстремум в точке, то эта точка обязательно будет критической, но не каждая критическая точка является экстремумом.  
  
Чтобы проверить, является ли критическая точка экстремумом, необходимо проанализировать вторые производные функции и воспользоваться тестом на экстремум. Для этого вычисляются вторые частные производные: fₓₓ = (∂² f)/(∂ x²) , fᵧᵧ = (∂² f)/(∂ y²) и смешанная производная fₓᵧ = (∂² f)/(∂ x ∂ y) . Далее, формируется так называемая матрица Гессе, которая представляет собой матрицу вторых производных:  
  
**H =f*(xx | f*(xy  
f(xy | fᵧᵧ)))**  
Для определения характера критической точки используется определитель матрицы Гессе, обозначаемый как D = fₓₓ fᵧᵧ - (fₓᵧ)² . В зависимости от знака этого определителя и значений вторых производных можно сделать вывод о характере критической точки. Если D > 0 и fₓₓ > 0 , то точка (x₀, y₀) является локальным минимумом. Если D > 0 и fₓₓ < 0 , то это локальный максимум. Если же D < 0 , то точка является седловой (то есть не является ни минимумом, ни максимумом). В случае, когда D = 0 , тест не дает однозначного ответа, и для дальнейшего анализа может потребоваться использование других методов.  
  
Таким образом, необходимое условие для существования экстремума заключается в том, что функция должна иметь критическую точку, где обе частные производные первого порядка равны нулю. Достаточные условия зависят от анализа второй производной и определителя матрицы Гессе. Эти условия позволяют нам не только находить экстремумы функции двух переменных, но и классифицировать их по типу — минимум, максимум или седло.  
  
Важно отметить, что данные условия применимы лишь в окрестности критических точек и не гарантируют наличие глобального экстремума на всей области определения функции. Для нахождения глобальных экстремумов может потребоваться исследование границ области и сравнение значений функции в этих точках. **1. Необходимое условие**  
Необходимое условие для существования экстремума функции f(x, y) в точке (x₀, y₀) заключается в том, что в этой точке должны выполняться условия первого порядка:  
∂ f / ∂ x(x₀, y₀) = 0 и ∂ f / ∂ y(x₀, y₀) = 0  
Это означает, что в точке (x₀, y₀) градиент функции равен нулю.  
  
**2. Достаточное условие**  
Для определения типа критической точки (максимум, минимум или седловая точка) используется второй производный тест. Для этого необходимо вычислить вторые частные производные функции:  
  
**• fₓₓ = (∂² f)/(∂ x²)   
• fᵧᵧ = (∂² f)/(∂ y²)   
• fₓᵧ = (∂² f)/(∂ x ∂ y)**

Затем вычисляется детерминант Гессиана:  
**D = fₓₓ fᵧᵧ - (fₓᵧ)²**  
  
Теперь можно использовать следующие критерии:  
  
1. Если D > 0 и fₓₓ > 0 , то в точке (x₀, y₀) находится локальный минимум.  
2. Если D > 0 и fₓₓ < 0 , то в точке (x₀, y₀) находится локальный максимум.  
3. Если D < 0 , то в точке (x₀, y₀) находится седловая точка.  
4. Если D = 0 , тест не дает информации о типе критической точки.

**32.Наибольшее и наименьшее значение функции   
независимых  
переменных в замкнутой ограниченной области.**Для начала определим, что такое замкнутая ограниченная область. Замкнутая область — это такая область, которая включает в себя все свои границы. Например, это может быть круг или прямоугольник, где все точки, находящиеся на границе, также включены в область. Ограниченная область означает, что она имеет конечные размеры и не простирается до бесконечности.  
При поиске наибольшего и наименьшего значений функции в такой области необходимо учитывать несколько шагов. Первым шагом является нахождение критических точек функции внутри области. Критическая точка — это точка, в которой первая производная функции равна нулю или не существует. Для функции двух переменных f(x, y) это означает, что необходимо найти частные производные (∂ f)/(∂ x) и (∂ f)/(∂ y) и решить систему уравнений, приравняв каждую из них к нулю. Однако в данном случае функция f(x, y) = 2ˣ зависит только от переменной x , а переменная y не влияет на значение функции, что упрощает задачу.  
Функция f(x) = 2ˣ является экспоненциальной функцией, которая принимает положительные значения и возрастает при увеличении x . Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения этой функции в замкнутой ограниченной области, необходимо учитывать границы области.  
  
1. **Определите область**: Пусть область задана интервалом [a, b] , где a < b .  
  
2. **Наименьшее значение**: Наименьшее значение функции f(x) = 2ˣ на интервале [a, b] будет достигаться в точке a :

f(a) = 2ᵃ

3. **Наибольшее значение**: Наибольшее значение функции будет достигаться в точке b :

f(b) = 2ᵇ

Таким образом, для замкнутой ограниченной области [a, b] :  
• Наименьшее значение функции f(x) = 2ˣ равно 2ᵃ .  
  
• Наибольшее значение функции равно 2ᵇ .  
  
Таким образом, резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что для функции двух независимых переменных f(x, y) = 2ˣ , находящейся в замкнутой ограниченной области, наибольшее значение достигается на правой границе области по оси x , а наименьшее значение — на левой границе

**33. Условный экстремум функции многих переменных. Метод  
Лагранжа**  
  
Условный экстремум функции в математическом анализе представляет собой задачу нахождения максимума или минимума функции при наличии определенных ограничений. Это важная тема, поскольку многие реальные задачи оптимизации не могут быть решены без учета дополнительных условий, которые ограничивают допустимые значения переменных. Например, в экономике, инженерии и других областях часто необходимо максимизировать прибыль или минимизировать затраты, но при этом нужно учитывать ограничения, такие как ресурсы, технологии или бюджет.  
  
Основной идеей поиска условного экстремума является использование метода множителей Лагранжа, который позволяет преобразовать задачу с ограничениями в более простую задачу без ограничений. Для этого вводится дополнительная переменная, называемая множителем Лагранжа. Пусть у нас есть функция f(x₁, x₂, …, xₙ) , которую мы хотим экстремизировать, и ограничение g(x₁, x₂, …, xₙ) = 0 . Мы формируем новую функцию Лагранжа, которая объединяет исходную функцию и ограничение:  
  
**𝓛(x₁, x₂, …, xₙ, λ) = f(x₁, x₂, …, xₙ) + λ g(x₁, x₂, …, xₙ).**  
  
Здесь λ — это множитель Лагранжа. Далее мы находим частные производные функции Лагранжа по всем переменным (включая λ ) и приравниваем их к нулю. Это приводит к системе уравнений:  
  
**∂ 𝓛 / ∂ xᵢ = 0 (i = 1, 2, …, n),  
∂ 𝓛 / ∂ λ = g(x₁, x₂, …, xₙ) = 0.**  
Решив эту систему уравнений, мы получаем критические точки, которые могут быть кандидатами на условный экстремум. Однако для окончательной проверки необходимо проанализировать эти точки на предмет того, являются ли они максимумом или минимумом. Для этого часто применяют второй производный тест или другие методы анализа.  
Важно отметить, что условия на существование экстремума могут варьироваться в зависимости от типа функции и ограничений. В случае более сложных ограничений (например, несколько ограничений) используется расширенный метод множителей Лагранжа. Если имеется несколько условий gⱼ(x₁, x₂, …, xₙ) = 0 (для j = 1, 2, …, m ), то функция Лагранжа будет выглядеть следующим образом:  
  
𝓛(x₁, x₂, …, xₙ, λ₁, λ₂, …, λₘ) = f(x₁, x₂, …, xₙ) + ∑ⱼ₌₁ᵐ λⱼ gⱼ(x₁, x₂, …, xₙ).  
  
Затем процесс нахождения частных производных и решения системы уравнений будет аналогичен описанному выше.  
Важным аспектом является также геометрическая интерпретация условного экстремума. Ограничения обычно представляют собой поверхности или кривые в пространстве значений переменных. Экстремум функции на этих ограничениях соответствует точкам касания уровня функции и поверхности ограничения. Это может быть визуализировано в двумерном или трехмерном пространстве: уровень функции представляется линиями или плоскостями (в зависимости от количества переменных), а ограничения — кривыми или поверхностями.  
  
  
▎**Пример:**  
  
Рассмотрим задачу: найти экстремум функции f(x, y) = xy при условии g(x, y) = x² + y² - 1 = 0 .  
  
1. Записываем функцию Лагранжа:

𝓛(x, y, λ) = xy + λ (x² + y² - 1)

2. Находим частные производные:

∂ 𝓛 / ∂ x = y + 2λ x = 0

∂ 𝓛 / ∂ y = x + 2λ y = 0

∂ 𝓛 / ∂ λ = x² + y² - 1 = 0

3. Решаем систему уравнений:  
   Из первых двух уравнений выразим y и x :  
   • Из первого: y = -2λ x   
   • Подставим во второе:   
      x - 2λ(-2λ x) = 0   
  
4. Получаем уравнение для x :  
   • Если x = 0 , то из условия g(x,y) = 0 получаем y² = 1 , следовательно, y = 1 или -1.  
   • Если x ≠ 0, то подставляем и решаем для λ.  
  
5. После нахождения всех критических точек необходимо проверить их на экстремум.

**34. Градиент функции скалярного поля, производная в направлении**  
1. **Градиент функции**: Градиент функции f(x, y, z) в трехмерном пространстве — это вектор, который указывает направление наибольшего увеличения функции и имеет величину, равную скорости этого увеличения. Он обозначается как ∇ f и вычисляется как:  
  
∇ f = (( ∂ f / ∂ x, ∂ f / ∂ y, ∂ f / ∂ z ))  
  
Для функции двух переменных f(x, y) :  
  
∇ f = (( ∂ f / ∂ x, ∂ f / ∂ y ))  
  
2. **Производная в направлении**: Производная функции f в направлении вектора 𝐯 (где 𝐯 = (v₁, v₂, v₃) ) определяется как скалярное произведение градиента функции и нормализованного вектора направления:  
D\_𝐯 f = ∇ f ⋅ 𝐯 / |𝐯|  
Если 𝐯 не нормализован, то производная в направлении 𝐯 может быть записана как:  
D\_𝐯 f = ∇ f ⋅ 𝐯

**35. Некоторые сведения о квадратичных формах**  
  
Квадратичные формы — это алгебраические выражения, которые могут быть записаны в виде суммы квадратов переменных, возможно, с учетом их коэффициентов. В общем виде квадратичная форма в n переменных может быть представлена как:  
  
Q(x₁, x₂, …, xₙ) = a₁₁x₁² + a₂₂x₂² + … + aₙₙxₙ² + 2a₁₂x₁x₂ + 2a₁₃x₁x₃ + … + 2a\_(n-1,n)xₙ₋₁xₙ  
где aᵢⱼ — коэффициенты формы.  
  
**Основные свойства квадратичных форм:**  
  
1. **Матрица квадратичной формы**: Квадратичная форма может быть записана в матричном виде как Q(𝐱) = 𝐱ᵀ A 𝐱 , где 𝐱 — вектор переменных, а A — симметричная матрица коэффициентов.  
  
2. **Определитель и знак**: Определитель матрицы A и его собственные значения играют важную роль в анализе свойств квадратичной формы. В частности, если все собственные значения положительны, форма называется положительно определенной; если все отрицательны — отрицательно определенной; если есть как положительные, так и отрицательные — неопределенной.  
  
3. **Каноническая форма**: Квадратичные формы можно привести к каноническому виду с помощью линейных преобразований. Это может быть сделано с использованием метода Грама или с помощью диагонализации матрицы.  
  
4. **Приложения**: Квадратичные формы имеют широкое применение в различных областях математики, включая теорию чисел, линейную алгебру, оптимизацию и теорию вероятностей.  
  
5. **Классификация**: Классификация квадратичных форм включает в себя определение их типа (положительно определенные, отрицательно определенные и т.д.) и изучение их свойств.  
  
▎**Примеры:**  
  
1. Простая квадратичная форма в двух переменных:  
Q(x, y) = 3x² + 4y² + 2xy  
  
2. Квадратичная форма в трех переменных:  
Q(x, y, z) = x² + 2y² - 3z² + xy - yz